

## Prof. Dr. Alfred Toth

### n-Kategorien über austauschbaren Domänen und Codomänen

1. In Toth (2009d) hatten wir gezeigt, dass man, wenn man Domänen und Codomänen von 1-Objekten austauscht, 8 verschiedene Morphismen erhält:

- |                        |                             |
|------------------------|-----------------------------|
| 1. $(A \rightarrow B)$ | 5. $(A \rightleftarrows B)$ |
| 2. $(A \leftarrow B)$  | 6. $(A \leftrightarrows B)$ |
| 3. $(B \rightarrow A)$ | 7. $(B \rightleftarrows A)$ |
| 4. $(B \leftarrow A)$  | 8. $(B \leftrightarrows A)$ |

Wenn man als Objekte die von Bense (1980) eingeführten Primzeichen setzt, dann erhält man z.B. für  $A = 1$  und  $B = 2$ :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $(1 \rightarrow 2) \equiv \alpha^{\rightarrow}$      | 5. $(1 \rightleftarrows 2) \equiv \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow}$           |
| 2. $(1 \leftarrow 2) \equiv \alpha^{\leftarrow}$        | 6. $(1 \leftrightarrows 2) \equiv \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow}$           |
| 3. $(2 \rightarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$ | 7. $(2 \rightleftarrows 1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \alpha^{\circ\leftarrow}$ |
| 4. $(2 \leftarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$   | 8. $(2 \leftrightarrows 1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow}$ |

Die Menge der Primzeichen  $PZ = (.1., .2., .3.)$  bilden also zusammen mit den Abbildungen und Kompositionen eine semiotische 1-Kategorie (vgl. Toth 2009a, b, c).

2. Nun kann man in einem nächsten Schritt die Primzeichen auf Subzeichen, d.h. auf Relationen der Form  $(a.b)$  mit  $a \in \{1., 2., 3.\}$  und  $b \in \{.1., .2., .3.\}$ , was nichts anderes ist als die Menge der kartesischen Produkte einer  $3 \times 3$ -Matrix, abbilden. Allgemein haben wir dann

- |  |  |
|--|--|
| 1. $(A \rightarrow (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow}$     | 9. $(A \rightleftarrows (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow} \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow}$          |
| 2. $(B \rightarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow}$ | 10. $(B \rightleftarrows (AB)) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow}$ |
| 3. $(A \leftarrow (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow}$        | 11. $(A \leftrightarrows (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow} \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow}$         |
| 4. $(B \leftarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow}$    | 12. $(B \leftrightarrows (AB)) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow}$ |

- |   |  |
|---|--|
| 5. $((AB) \rightarrow A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$ | 13. $((AB) \rightleftharpoons A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$   |
| 6. $((AB) \rightarrow B) \equiv \alpha^{\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$    | 14. $((AB) \rightleftharpoons B) \equiv \alpha^{\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$             |
| 7. $((AB) \leftarrow A) \equiv \text{id}\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow}$ | 15. $((AB) \rightleftharpoons A) \equiv \text{id}\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\circ\rightarrow}$ |
| 8. $((AB) \leftarrow B) \equiv \alpha^{\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$       | 16. $((AB) \rightleftharpoons B) \equiv \alpha^{\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$             |

Der Vorteil dieses kategorialen Verfahrens ist, dass Subzeichen immer als kartesische Produkte ihrer Primzeichen behandelt werden und dass damit die Paradoxien der „klassischen“ semiotischen Kategorietheorie von Bense, Leopold usw. eliminiert werden können. Für diese galt nämlich z.B. (vgl. z.B. Leopold 1990)

$$(.2) \rightarrow (.3) \equiv \beta$$

$$(1.2) \rightarrow (1.3) \equiv \beta,$$

d.h. Subzeichen wurden nicht von Primzeichen unterschieden. Streng genommen verunmöglicht es dieses Verfahrens also, z.B. die Morphismen zwischen

$$(1.2) \rightarrow (2.3)$$

zu bestimmen. Das Verfahren

$$(1.2) \rightarrow (2.3) = [[(1 \rightarrow 2), (1 \rightarrow 3)], [(2 \rightarrow 2), (2 \rightarrow 3)]] = [(\alpha, \beta\alpha), (\text{id}2, \beta)]$$

wurde erst in Toth (2008, S. 159 ff.) eingeführt. Ferner war es im „klassischen“ System unmöglich, zwischen Objekten und Morphismen streng zu unterscheiden, und dies ist ja gerade in der Semiotik wichtig, wo ein Subzeichen einerseits eine statische Entität, andererseits eine dynamische Semiose darstellt. Ein Subzeichen wie (2.3) ist aber nach Bense immer durch den Morphismus  $\beta$  zu beschreiben.

3. So kann man nun weiterfahren und nach 1-Kategorien und 2-Kategorien auch höhere semiotischen Kategorien bilden, z.B.

- 1-Kat.:  $\{(PZ \rightarrow PZ), (SZ \rightarrow SZ), (ZKL/RTH \rightarrow ZKL/RTH), \dots\}$
- 2-Kat.:  $\{(PZ \rightarrow SZ), (PZ \rightarrow ZKL/RTH), (PZ \rightarrow \text{Trich. Tr.})\}$
- 3-Kat.:  $\{(SZ \rightarrow ZKL/RTH), (SZ \rightarrow \text{Tr. Tr.})\}$
- 4-Kat.:  $\{(ZKL/RTH \rightarrow \text{Tr. Tr.})\}$

## Bibliographie

- Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, 1980, S. 287-294
- Leopold, Cornelia, Kategoriethoretische Konzeption der Semiotik. In: Semiosis 57/58, 1990, S. 93-100
- Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008
- Toth, Alfred, Semiotische Kategorien und Bikategorien I. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kat.%20u.%20Bikat..pdf> (2009a)
- Toth, Alfred, Semiotische Kategorien und Bikategorien II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kat.%20und%20Bikat.%20II.pdf> (2009b)
- Toth, Alfred, Übersicht über semiotische n-Kategorien. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Sem.%20n-Kateg..pdf> (2009c)
- Toth, Alfred, Zeichenklassen, definiert über austauschbaren Domänen und Codomänen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (erscheint, 2009d)

25.9.2009